ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΠΑ.Λ. Α΄ & Β΄

23 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ με παράγουσα συνάρτηση F. Τη σταθερή διαφορά F(β) − F(α) ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α ως το β και το συμβολίζουμε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Α2. α → Σ, β → Σ, γ → Λ, δ → Λ, ε → Σ.

Α3. **α)** $\int_\alpha^\beta \text{ημ}x dx = [-\text{συν}x]_\alpha^\beta = -\text{συν}\beta + \text{συν}\alpha$.

β) $(cf)'(x) = cf'(x)$.

γ) $\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(\alpha^2 x + \ln x) = \alpha^2\cdot 1 + \ln 1 = \alpha^2$.

Β2. $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to1^+}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} =$

$= \lim_{x\to1^+}\frac{x(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4} = \lim_{x\to1^+} x\left(\sqrt{x+3}+2\right) = 1\left(\sqrt{x+3}+2\right) = 4.$

Β3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, όταν
$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2 \quad$ ή $\quad \alpha = -2.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i	Σχετική συχνότητα f_i%	$x_i v_i$
6	25	25/50 = 50%	150
10	17	17/50 = 34%	170
15	6	6/50 = 12%	90
20	2	2/50 = 4%	40
Σύνολα	50	100	450

Γ2. $\bar{x} = \dfrac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{v} = \dfrac{450}{50} = 9.$

Γ3. Το ποσοστό των υπαλλήλων με μισθό το πολύ 1000 € είναι 50% + 34% = 84%.

Γ4. $s^2 = \dfrac{v_1(x_1-\bar{x})^2 + v_2(x_2-\bar{x})^2 + v_3(x_3-\bar{x})^2 + v_4(x_4-\bar{x})^2}{v} =$

$$= \frac{25(6-9)^2 + 17(10-9)^2 + 6(15-9)^2 + 2(20-9)^2}{50} =$$

$$= \frac{25\cdot 9 + 17\cdot 1 + 6\cdot 36 + 2\cdot 121}{50} = \frac{700}{50} = 14.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = [(x-2)^2 \cdot (x+\alpha)]' = [(x-2)^2]' \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 \cdot (x+\alpha)' =$
$2(x-2)(x+\alpha) + (x-2)^2 = (x-2)(2x+2\alpha+x-2) = (x-2)(3x+2\alpha-2),\ x \in \mathbb{R}.$

Δ2. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$, θα είναι $f'(4) = 0$.
Όμως $f'(x) = (x-2)(3x+2\alpha-2)$ οπότε
$(4-2)(3\cdot 4 + 2\alpha - 2) = 0 \iff 2(10+2\alpha) = 0 \iff \alpha = -5$

Δ3. Για την τιμή $\alpha = -5$ είναι:

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-5) \quad \text{και} \quad f'(x) = (x-2)\cdot(3x-12)$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \iff (x-2)\cdot(3x-12) = 0 \iff x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 4.$$

και κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών της f.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	
			τ.max f(2)=0		τ.min f(4)=-4		

Δ4. Βρίσκουμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των g, h, λύνοντας την εξίσωση $g(x) = h(x)$.

$g(x) = h(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 6x - 24 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 4$.

Είναι $g(x) - h(x) = 3(x-2)(x-4)$.

Το πρόσημο της $g - h$ δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
g(x)-h(x)		+	0	-	0	+	

Έτσι

$$E(\Omega) = -\int_2^4 (3x^2 - 18x + 24)\,dx = -\left[x^3 - 9x^2 + 24x\right]_2^4 =$$
$$= -\left[(64 - 144 + 96) - (8 - 36 + 48)\right] = 4 \text{ τ.μ.}$$